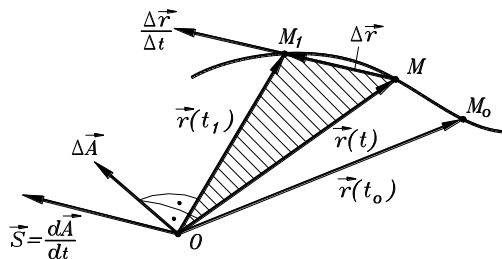


## Sektorska brzina tačke

Neka je kretanje tačke  $M$  zadato vektorom položaja. Pri kretanju tačke vektor položaja



$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  opisuje konusnu površinu sa vrhom u tački  $O$ .

Kao i pri definisanju brzine tačke u prethodnim razmatranjima, uočavaju se dva bliska položaja tačke  $M$ : položaj u kome se tačka nađe u trenutku  $t$ , a koji je određen vektorom položaja  $\vec{r}(t)$  i položaj u kome se tačka nađe u trenutku  $t_1 = t + \Delta t$

i koji je određen sa  $\vec{r}(t_1) = \vec{r} + \Delta \vec{r}$ .

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta \vec{r})$$

Veličina

$$\vec{S}_{sr} = \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t})$$

naziva se srednja sektorska brzina. Graničnim prelazom kada  $\Delta t \rightarrow 0$  dobija se sektorska brzina tačke u datom trenutku, tj.

$$\vec{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2}(\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}) = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}), \text{ tj. } \vec{S} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{V}).$$

Ako je kretanje tačke  $M$  zadato jednačinama kretanja u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem jednačinama, tada je

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}, \text{ tj.}$$

$$S_x = \vec{S} \cdot \vec{i} = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}),$$

$$S_y = \vec{S} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}),$$

$$S_z = \vec{S} \cdot \vec{k} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{S_x}{S}, \quad \cos \beta = \frac{S_y}{S}, \quad \cos \gamma = \frac{S_z}{S}.$$

Zapaža se da je sektorska brzina upravna na ravan kretanja u slučaju kada se tačka kreće u ravni, npr.  $Oxy$ , ona je tada

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k}.$$

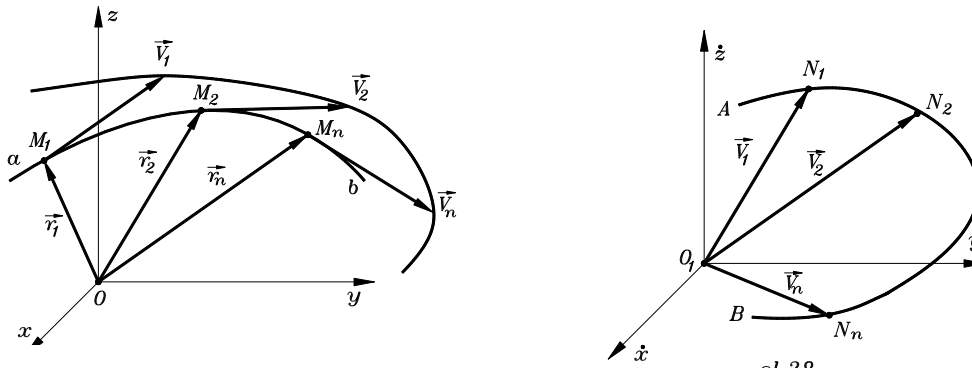
Ako je kretanje tačke u ravni zadato u odnosu na polarni koordinatni sistem jednačinama (2.12) sektorska brzina tačke određena je sa

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{r}_o & \vec{p}_o & \vec{k} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\vec{k} = S_z\vec{k}.$$

### 2.2.4. Hodograf brzine tačke

Trajektorija tačke predstavlja geometrijsko mesto krajeva vektora položaja tačke nanetih iz istog nepokretnog pola. Ako se isti postupak ponovi sa vektorima brzine tačke, dobija se kriva  $AB$ , koja se naziva hodograf brzine. Dakle, geometrijsko mesto svih krajeva vektora brzine tačke, nanetih iz istog nepokretnog pola, naziva se hodograf brzine.

Geometrijsko mesto krajeva vektora brzine tačke nanetih u odgovarajućim položajima tačke na putanji naziva se velocida. Koristeći istu terminologiju, trajektorija tačke se može nazvati hodograf vektora položaja tačke.



Parametarske jednačine hodografa brzine predstavljaju koordinate tačke  $N$  hodografa brzine čiji je položaj određen vektorom  $\vec{V}$  i biće jednake projekcijama vektora brzine na ose izabranog koordinatnog sistema, tj.

$$\dot{x} = \dot{x}(t), \quad \dot{y} = \dot{y}(t), \quad \dot{z} = \dot{z}(t).$$

Neposredna zavisnost između projekcija brzina  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  i  $\dot{z}$  može se dobiti iz prethodnih jednačina eliminacijom parametra  $t$ . Npr., jednačine

$$\dot{x} = \dot{x}[\hat{f}(\dot{z})],$$

$$\dot{y} = \dot{y}[\hat{f}(\dot{z})],$$

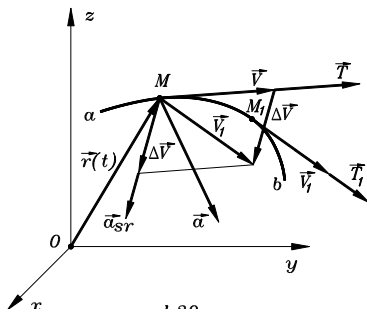
predstavljaju jednačine dveju površi u čijem se preseku nalazi hodograf brzine tačke.

### Ubrzanje tačke

Kinematička veličina koja karakteriše promenu vektora brzine tačke naziva se ubrzanje tačke.

### Vektorski način određivanja ubrzanja tačke

Neka se uočena tačka  $M$  kreće po putanji  $ab$ . Uočavaju se dva bliska položaja posmatrane tačke: položaj tačke  $M$  određen vektorom položaja  $\vec{r}(t)$  u kome se tačka nađe u trenutku  $t$  i kada ima brzinu  $\vec{V}$  i položaj tačke u kome se ona nađe u trenutku  $t_1 = t + \Delta t$ , kada ima brzinu  $\vec{V}_1 = \vec{V}(t_1) = \vec{V} + \Delta\vec{V}$ . Odnos priraštaja vektora brzine



$\Delta \vec{V}$  i njemu odgovarajućeg priraštaja vremena  $\Delta t$  naziva se srednje ubrzanje tačke za interval vremena  $\Delta t$ , odnosno

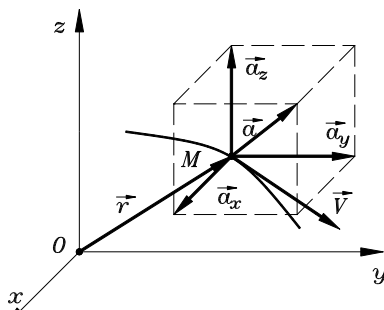
$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}}{t_1 - t}.$$

Graničnim prelazom, kada se  $\Delta t$  smanjuje i teži nuli, vektor srednjeg ubrzanja  $\vec{a}_{sr}$  teži nekoj graničnoj vrednosti, koja se naziva ubrzanje tačke u datom trenutku (ubrzanje tačke) i određeno je sa

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Dimenzija kojom se izražava intenzitet ubrzanja je odnos dužine i kvadrata vremena  $[a] = [LT^{-2}]$ , a jedinice za merenje su:  $ms^{-2}$ ,  $cms^{-2}$ ,  $kmh^{-2}$ , itd.

### Analitički (koordinatni) način određivanja ubrzanja tačke



**Određivanje ubrzanja tačke u Dekartovim pravouglim koordinatama**

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x, \quad a_y = \ddot{y} = \dot{V}_y, \quad a_z = \ddot{z} = \dot{V}_z,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos \beta = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

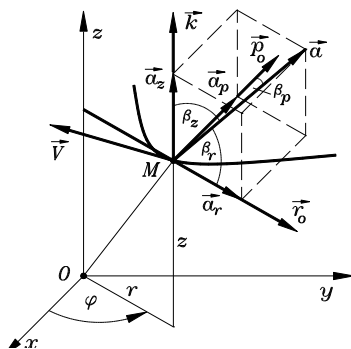
Ako se tačka kreće u ravni, tada je

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y},$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \quad \cos \alpha = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos \beta = \frac{\ddot{y}}{a},$$

a u slučaju pravolinijskog kretanja tačke je

$$\vec{a} = a_x\vec{i} = \ddot{x}\vec{i} = \dot{V}_x\vec{i}, \quad a = |a_x| = |\dot{V}_x|.$$



**Određivanje ubrzanja tačke u polarno – cilindarskim koordinatama**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{r}_o + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{p}_o + \ddot{z}\vec{k},$$

$$\vec{a} = a_r\vec{r}_o + a_p\vec{p}_o + a_z\vec{k},$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z},$$

-  $a_r$  -radijalno,  $a_p$  -poprečno (cirkularno, transversalno) i  $a_z$  -aksijalno ubrzanje tačke.

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2 + a_z^2}, \quad \cos\beta_r = \frac{a_r}{a}, \quad \cos\beta_p = \frac{a_p}{a}, \quad \cos\beta_z = \frac{a_z}{a}. \quad (2.117)$$

Kada se tačka kreće u ravni, tada je

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ a_p &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \end{aligned} \quad a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}, \quad \cos\beta_r = \frac{a_r}{a}, \quad \cos\beta_p = \frac{a_p}{a}.$$

Izraz za poprečno ubrzanje može pisati i u obliku

$$a_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}), \quad a_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(2S_z),$$

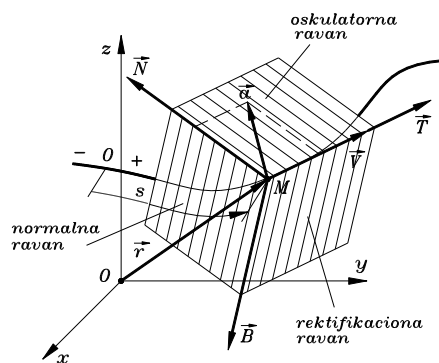
gde je  $S_z$  označena projekcija sektorske brzine tačke na osu  $Oz$ , odakle sledi da kada je sektorska brzina konstantna, važi

$$a_p = 0.$$

## Prirodni način određivanja ubrzanja tačke

### Prirodni trijedar u tački prostorne krive

Neka se posmatra kretanje tačke  $M$  po poznatoj putanji  $ab$ . Uočavaju se dva bliska položaja tačke  $M$  na putanji: položaj u kome je jedinični vektor tangente na putanju  $\vec{T}$  i položaj u kome je jedinični vektor tangente na putanju  $\vec{T}_1 = \vec{T} + \Delta\vec{T}$ . Granični položaj ravni koju formiraju ova dva vektora, kada tačka  $M_1$  teži tački  $M$ , naziva se oskulatorna ravan prirodnog trijedra u tački  $M$  prostorne krive koja predstavlja trajektoriju posmatrane tačke.

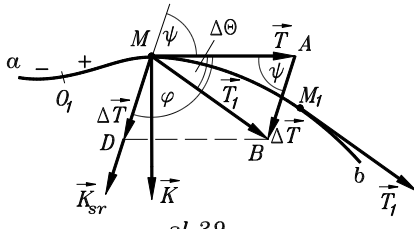


Upravno na jedinični vektor tangente  $\vec{T}$  nalazi se normalna ravan prirodnog trijedra u tački  $M$ . Presek oskulatorne i normalne ravni određuje pravac glavne normale čiji je jedinični vektor  $\vec{N}$  i koji je usmeren na konkavnu stranu krive. Upravno na ove dve ravni nalazi se tangencijalna (rektifikaciona) ravan prirodnog trijedra u tački  $M$  krive. Presek normalne i tangencijalne ravni određuje pravac binormale čiji je jedinični vektor

$\vec{B}$  upravan na ostala dva jedinična vektora prirodnog trijedra, a orijentisan je tako da vektori  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$  i  $\vec{B}$  obrazuju desni trijedar.

### Vektor krivine krive

Pri kretanju tačke  $M$  po poznatoj putanji  $ab$  mogu se uočiti dva bliska položaja tačke  $M$ : položaj u kome se tačka nađe u trenutku  $t$ , koji je određen lučnom koordinatom  $s = s(t) = \widehat{OM}$ , kada je jedinični vektor tangente na putanju  $\vec{T}$  i položaj u kome se



Promenom lučne koordinate  $\Delta s = s_1 - s$  menja se i jedinični vektor tangente  $\vec{T}$  zbog čega se može pisati da je

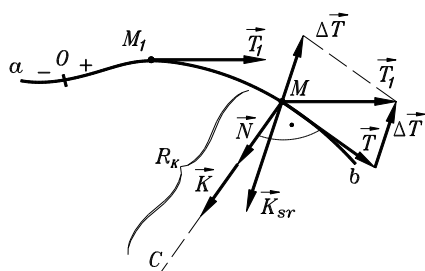
$$\vec{T} = \vec{T}(s)$$

$$\vec{K}_{sr} = \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s},$$
$$\vec{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s} = \frac{d\vec{T}}{ds}.$$
$$|\Delta \vec{T}| = \overline{AB} = 2 \sin \frac{\Delta \theta}{2},$$
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{T}|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\Delta s}, \quad K = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}, \quad \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} = 1,$$

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}.$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{1}{R_K},$$
$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_\kappa}, \quad K = \frac{1}{R_\kappa}.$$
$$\varphi = \pi - \psi, \quad \psi = \frac{\pi - \Delta\theta}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta}{2},$$

$(\Delta s \rightarrow 0, \Delta \theta \rightarrow 0) \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \varphi = \frac{\pi}{2}$ , što znači da je vektor krivine  $\vec{K}$  upravan na jedinični vektor tangente  $\vec{T}$  u tački  $M$ .



U slučaju kada je  $\Delta s > 0$ , priraštaj jediničnog vektora  $\Delta \vec{T}$  usmeren je na "unutrašnju" stranu krive, a u slučaju kada je  $\Delta s < 0$ , vektor  $\Delta \vec{T}$  orijentisan je na "spoljašnju" stranu krive.

Međutim, vektor  $\frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s}$  koji je jednak  $\vec{K}_{sr}$

usmeren je na "unutrašnju" stranu krive zbog znaka skalara  $\Delta s$ . Iz svega prethodnog proizilazi da vektor krivine krive ima pravac i

smer jediničnog vektora normale  $\vec{N}$  u tački  $M$  krive, zbog čega se može pisati da je

$$\vec{K} = K\vec{N} = \frac{1}{R_K} \vec{N}.$$

### Tangencijalno i normalno ubrzanje tačke

U slučaju kada se tačka kreće po poznatoj putanji, i kada je njeno kretanje zadato zakonom kretanja tačke po putanji  $s = s(t)$ , tada na osnovu definicije ubrzanja sledi

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \frac{d}{dt}(V_T \vec{T}) = \frac{d}{dt}(\dot{s} \vec{T}),$$

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \dot{s} \dot{\vec{T}},$$

$$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{ds} \dot{s}, \quad \dot{\vec{T}} = \dot{s} \vec{K} = \frac{\dot{s}}{R_K} \vec{N}, \quad \vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_K} \vec{N}.$$

Kako je

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N} + a_B \vec{B},$$

sledi da je

$$a_T = \ddot{s} = \dot{V}_T, \quad a_N = \frac{\dot{s}^2}{R_K} = \frac{V^2}{R_K}, \quad a_B = 0,$$

gde je  $a_T$ -tangencijalno,  $a_N$ -normalno i  $a_B$ -binormalno ubrzanje tačke.

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}, \quad \cos \beta_T = \frac{a_T}{a}, \quad \cos \beta_N = \frac{a_N}{a}.$$

### Određivanje poluprečnika krivine putanje tačke

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T}, \quad a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{V}}{V_T}, \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}, \quad R_K = \frac{V^2}{a_N}.$$

Konkretno, kada je kretanje tačke zadato u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem, diferenciranjem izraza za intenzitet brzine tačke, dolazi se do relacije  $|2Va_T| = |2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z}|$ , iz koje sledi izraz za intenzitet tangencijalnog i normalnog ubrzanja tačke

$$|a_T| = \frac{|\ddot{x}\dot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad a_N = \frac{\sqrt{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

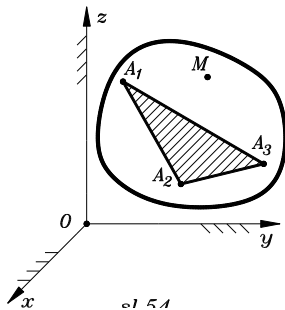
pa je

$$R_K = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - a_T^2}}.$$

## Kinematika tela

### Osnovni pojmovi kinematike tela

Položaj tela u prostoru je određen ako je određen položaj svake njegove tačke. Za određivanje položaja tačaka tela koristi se izabrani koordinatni sistem. Koordinate svih tačaka tela nisu nezavisne. Veze između njih su, u ovom slučaju, nepromenljivo rastojanje. Umesto određivanja položaja svih tačaka tela, moguće je odrediti i položaj tela u odnosu na izabrani koordinatni sistem. Nezavisni parametri koji jednoznačno određuju položaj posmatranog tela u odnosu na izabrani koordinatni sistem nazivaju se generalisane koordinate. Najmanji broj nezavisnih generalisanih koordinata predstavlja broj stepeni slobode kretanja.



$$(x_M - x_1)^2 + (y_M - y_1)^2 + (z_M - z_1)^2 = \overline{A_1 M}^2,$$

$$(x_M - x_2)^2 + (y_M - y_2)^2 + (z_M - z_2)^2 = \overline{A_2 M}^2,$$

$$(x_M - x_3)^2 + (y_M - y_3)^2 + (z_M - z_3)^2 = \overline{A_3 M}^2.$$

Iz ovih jednačina mogu se odrediti koordinate  $x_M$ ,  $y_M$  i  $z_M$ , proizvoljno izabrane tačke  $M$ , zbog čega se kaže da je položaj tela u prostoru određen ako je poznat položaj bilo koje tri njegove nekolinearne tačke.

Međutim, svih devet koordinata uočenih nekolinearnih tačaka  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  nisu međusobno nezavisne jer se između njih mogu uspostaviti relacije koje govore o nepromenljivosti uzajamnog rastojanja, tj.

$$\begin{aligned} \overline{A_1 A_2}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\ \overline{A_2 A_3}^2 &= (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2, \\ \overline{A_3 A_1}^2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

To znači da je broj nezavisnih koordinata koje određuju položaj posmatranog tela dat sa  $9-3=6$ .

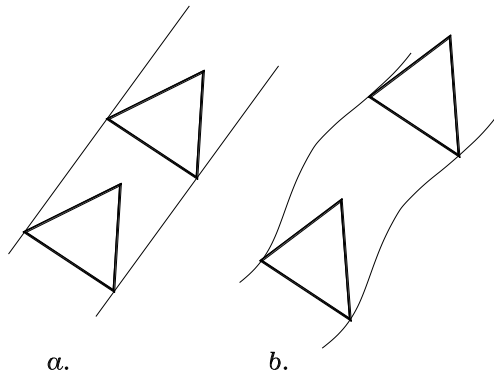
Osnovni zadaci kinematike tela su:

- 1.) određivanje kretanja tela u odnosu na izabrani koordinatni sistem;
- 2.) proučavanje kinematičkih karakteristika tela i
- 3.) određivanje kretanja i proučavanje karakteristika kretanja pojedinih tačaka tela.

U kinematici tela posebno će biti razmatrane sledeće vrste kretanja:

- translatorno,
- obrtanje oko nepokretne ose,
- ravno,
- obrtanje oko nepokretne tačke (sferno) i
- opšte kretanje.

## Translatorno kretanje tela



Telo vrši translatorno kretanje ako proizvoljno izabrana duž, koja spaja dve tačke tela, u svakom trenutku ostaje paralelna sama sebi. Razlikuju se:

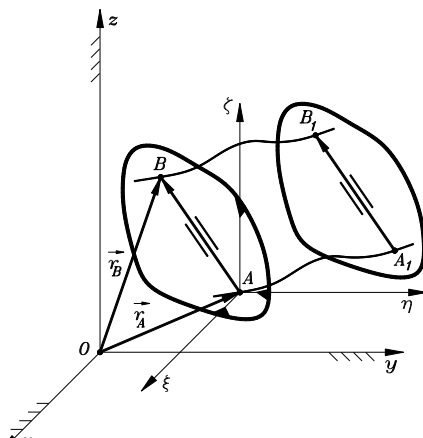
- a) pravolinijska translacija i
- b) krivolinijska translacija..

## Određivanje kretanja i karakteristika kretanja pojedinih tačaka tela koje vrši translatorno kretanje

Neka su uočene dve proizvoljne tačke  $A$  i  $B$  posmatranog tela koje vrši translatorno kretanje. Njihovi položaji, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem  $Oxyz$ , određeni su vektorima položaja

$$\vec{r}_A(t) = x_A(t)\vec{i} + y_A(t)\vec{j} + z_A(t)\vec{k},$$

$$\vec{r}_B(t) = x_B(t)\vec{i} + y_B(t)\vec{j} + z_B(t)\vec{k},$$



Položaj tačke  $B$  u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem  $A\xi\eta\zeta$ , koji je kruto vezan za telo u proizvoljnoj tački  $A$  izabranoj za pol, određen je vektorom  $\vec{AB} = \xi_B\vec{i} + \eta_B\vec{j} + \zeta_B\vec{k}$ , pa je

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB},$$

$$x_B = x_A(t) + \xi_B$$

$$y_B = y_A(t) + \eta_B.$$

$$z_B = z_A(t) + \zeta_B$$

Iz prethodnog proizilazi da su jednačine kretanja tela koje vrši translatorno kretanje u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem  $Oxyz$  date sa

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad z_A = z_A(t). \quad (3.5)$$

Kinematike karakteristike pojedinih tačaka tela koje vrši translatorno kretanje su

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_B &= \dot{\vec{r}}_A, & \vec{V}_B &= \vec{V}_A, \\ \dot{\vec{V}}_B &= \dot{\vec{V}}_A, & \vec{a}_B &= \vec{a}_A. \end{aligned}$$